Análisis Combinatorio

OBJETIVOS

Unidad	Tema	Subtema	Objetivos
VI Análisis Combinatorio			
	6.1 Principio de conteo		
	6.2 Permutaciones		
	6.3 Combinaciones		
	6.4 Cuatro Conceptos: Series, Teorema Binomial, Principio de las casillas, Inducción Matemática		
			Aprender las técnicas de conteo para determinar el número de resultados posibles de un experimento o evento particular o el número de elementos en un conjunto particular sin enumerarlos directamente.
			Aprender a resolver problemas de Permutaciones
			Aprender a resolver problemas de Combinaciones
			• Conocer de las casillas para establecer teoremas y fórmulas matemáticas. • Por medio de inducción matemática establecer fórmulas y teoremas de los número enteros, es el objetivo de este tema. • Definir, reconocer y aplicar el principio del buen orden. • Entender y aplicar el concepto de Serie • Aprender el teorema binomial

6 Análisis Combinatorio

Introducción

El análisis combinatorio estudia las distintas formas de agrupar y ordenar los elementos de un conjunto, sin tener en cuenta la naturaleza de estos elementos.

Los problemas de arreglos y combinaciones pueden parecer aburridos y quizá se piense que no tienen utilidad pero los teoremas del análisis combinatorio son la base del cálculo de la probabilidad.

La probabilidad se encarga de los arreglos y las combinaciones que determinan el número de formas diferentes en que un acontecimiento puede suceder.

El análisis combinatorio tiene aplicaciones en el diseño y funcionamiento de la tecnología computacional así como también en las ciencias. La teoría combinatoria se aplica en las áreas en donde tengan relevancia las distintas formas de agrupar elementos.

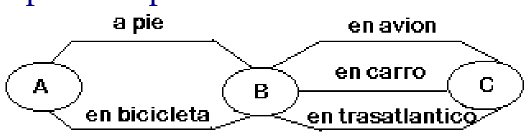
El origen del análisis combinatorio se le atribuye a los trabajos de Pascal (1596 – 1650) y Fermat (1601 - 1665) que fundamentan el cálculo de probabilidades.

Leibiniz (1646 – 1716) publicó en 1666 "Disertatio de Arte Combinatoria". El mayor impulsor de esta rama fue Bernulli quien en sus trabajos incluye una teoría general de permutaciones y combinaciones.

Resumiendo, El objeto del Análisis combinatorio o Combinatoria es el estudio de las distintas ordenaciones que pueden formularse con los elementos de un conjunto, de los distintos grupos que pueden formarse con aquellos elementos y de las relaciones entre unos y otros grupos.

Principio Fundamental del Análisis Combinatorio

Una persona tiene 2 formas de ir de una ciudad A a otra ciudad B; y una vez llegada a B, tiene 3 maneras de llegar a otra ciudad C, ¿De cuántas maneras podrá realizar el viaje de A a C pasando por B?



Si empezó a pie, podrá tomar luego avión, carro o trasatlántico, y si empezó en bicicleta, también podrá tomar avión, carro o trasatlántico.

La persona tuvo 6 formas diferentes de realizar el viaje que son: (iniciales) pa, pc, pt, ba, bc, bt. (2 x 3 = 6).

Por lo que el principio fundamental del análisis combinatorio, puede expresarse así:

Si una primera decisión, operación o acción puede efectuarse de a formas diferentes, una segunda acción puede efectuarse de b formas diferentes, una tercera acción puede efectuarse de c formas diferentes y así sucesivamente hasta la enésima acción que puede efectuarse de z formas diferentes, entonces el número total de formas diferentes que pueden efectuarse estas n acciones es igual con: a x b x c x … x z. **Este principio también se llama principio de conteo ó principio multiplicativo.**

6.1 Principio de conteo

Problemas de Conteo

A menudo nos encontramos con preguntas del tipo ¿qué proporción de...? ¿Cuál es la probabilidad de...? ¿De cuántas maneras se puede...?

Muchas veces, para responder, se necesita un pensamiento sistemático y un poco de información adicional. Hay técnicas y principios matemáticos útiles en situaciones variadas, pero muchas preguntas se pueden responder directamente, contando en forma sistemática, es decir, listando todos los posibles resultados en un orden sistemático, para luego contar cuántos son, o desarrollando reglas de conteo. Algunas soluciones parecen ingeniosas cuando se ven por primera vez (y muchas veces lo son) pero, cuando podemos aplicar nuevamente estos métodos ingeniosos en problemas similares y en situaciones relacionadas entre sí, hemos desarrollado una técnica.

Ejemplo:
Un profesor tiene dos docenas de libros de computación y está interesado en la forma que tratan los temas: (C) compiladores, (E) estructura de datos, (I) interpretes
Si

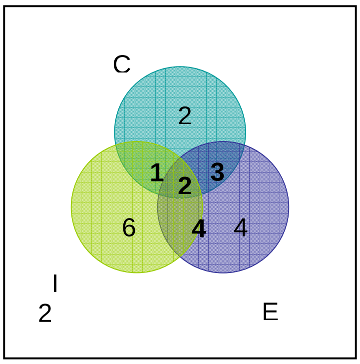
$|C| = 8$, $\quad |C \cap E| = 5 \quad |C \cap E \cap I| = 2$

$|E| = 13 \quad |C \cap I| = 3$

$|I| = 13 \quad |E \cap I| = 6$

a) ¿Cuántos libros incluyen el material de exactamente uno de los temas?
b) ¿Cuántos no tienen ninguno de los temas?
c) no tienen material de compilados

U = 24



a) uno de los temas = 2+4+6 = 12
b) ninguno de los temas = 2
c) no tienen material de compilados=4+4+6+2 =16

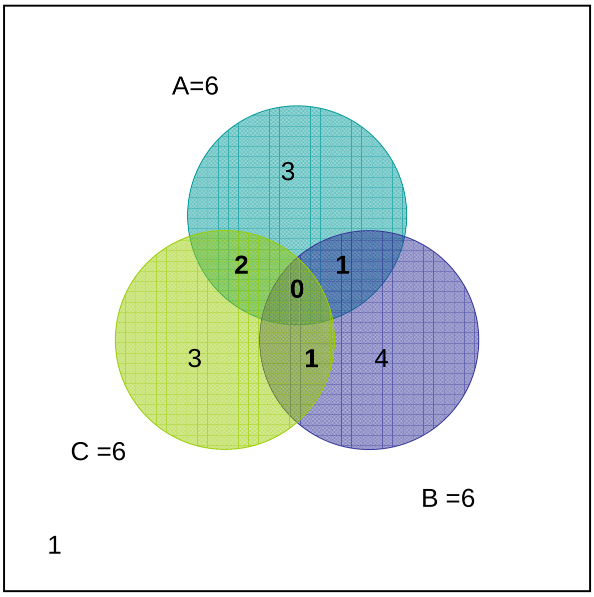
Ejemplo:
Al seleccionar un computador nuevo para su centro de cálculo, el responsable del mismo examina 15 modelos diferentes considerando:
A: el dispositivo para CD
B: el graficador y su pantalla
C: memoria RAM
El número de computadoras con las características son:

$|A| = |B| = |C| = 6$

$|A \cap B| = |B \cap C| = 1$

$|A \cap C| = 2$, $|A \cap B \cap C| = 0$

U=15



¿Cuántos modelos tienen exactamente
a) una característica?
b) dos características?
c) tres características?

¿Cuántos modelos tienen a lo mucho
a) una característica?
b) dos características?
c) tres características?

¿Cuántos modelos tienen por lo menos
a) una característica?
b) dos características?
c) tres características?

Técnicas de contar

Diez estudiantes decidieron celebrar la terminación de sus estudios en la escuela secundaria con un almuerzo en un restaurante. Una vez reunidos, se entabló entre ellos una discusión sobre el orden en que habían de sentarse a la mesa. Unos propusieron que la colocación fuera por orden alfabético; otros, con arreglo a la edad; otros, por los resultados de los exámenes; otros, por la estatura, etc. La discusión se prolongaba, la sopa se enfrió y nadie se sentaba a la mesa. Los reconcilió el camarero, dirigiéndoles las siguientes palabras:

- Jóvenes amigos, dejen de discutir. Siéntense a la mesa en cualquier orden y escúchenme

Todos se sentaron sin seguir un orden determinado. El camarero continuó:

- Que uno cualquiera anote el orden en que están sentados ahora. Mañana vienen a comer y se sientan en otro orden. Pasado mañana vienen de nuevo a comer y se sientan en orden distinto, y así sucesivamente hasta que hayan probado todas las combinaciones posibles. Cuando llegue el día en que ustedes tengan que sentarse de nuevo en la misma forma que ahora, les prometo solemnemente, que en lo sucesivo les convidaré a comer gratis diariamente, sirviéndoles los platos más exquisitos y escogidos.

La proposición agradó a todos y fue aceptada. Acordaron reunirse cada día en aquel restaurante y probar todos los modos distintos, posibles, de colocación alrededor de la mesa, con el objeto de disfrutar cuanto antes de las comidas gratuitas.

Sin embargo, no lograron llegar hasta ese día. Y no porque el camarero no cumpliera su palabra sino porque el número total de combinaciones diferentes alrededor de la mesa es extraordinariamente grande. Éstas son exactamente 3'628,800. Es fácil calcular, que este número de días son casi 10,000 años.

Principios fundamentales de conteo:

Principio de adición:

Si un evento E puede ocurrir en m formas y un segundo evento F puede ocurrir en n formas y ambos eventos no pueden ocurrir en forma simultánea entonces E o F pueden ocurrir en $m+n$ formas.

Ejemplos:

a) Existen 3 profesores y 2 profesoras que imparten la materia de cálculo. Un estudiante puede escoger un profesor de $3+2=5$ formas.
b) En una biblioteca hay 3 libros de novelas de misterio diferentes, 5 novelas de romance y 4 novelas de aventura diferentes. Existen $3+5+4=12$ formas de escoger una novela.
c) Cinco empresas de transporte terrestre tienen servicio diario entre Mérida y México. Tres empresas de aviación tienen vuelo diario entre Mérida y México. En consecuencia, hay 5+3 maneras de ir de Mérida a México en avión o en autobús. En los problemas de conteo, la palabra "o" se traduce en suma.

d) Si tengo un billete de \$50, uno de \$100, uno de \$200 y un billete de \$1000, ¿Cuál es el número total de precios que puedo pagar usando algún o todos mis billetes?

Este es un buen ejemplo de una situación en la que se necesita un listado sistemático. Como tenemos 4 billetes de denominación diferente, debemos considerar 4 casos. Éstos son, los precios que podemos cubrir con un billete, con 2 billetes, con 3 billetes y con 4 billetes. Se debe de examinar cada uno de estos casos y luego aplicar el principio de adición.

- Con 1 billete podemos tener 4 precios: \$50, \$100, \$200 y \$1000.
- Con 2 billetes, podemos listar sistemáticamente las combinaciones:
    - i. Las que tienen \$50 son: \$50 + \$100 = \$150, \$50+\$200 = \$250, \$50 + \$1000 = \$1050
    - ii. Las que tienen \$100 y no hemos listado aún: \$100 + \$200 = \$300, \$100+\$1000 = 1100
    - iii. Y las que tienen \$200 y tampoco hemos listado: \$200 + \$100 = \$1200
- Con 3 billetes, las combinaciones son(una para cada billete que falta):
    - i. \$50 + \$100 + \$200 = \$350 (falta la de \$1000)
    - ii. \$100 + \$200 + \$1000 = \$1300 (falta la de \$50)
    - iii. \$50 + \$200 + \$1000 = \$1250 (falta la de \$100)
    - iv. \$50 + \$100 + \$1000 = \$1150 (falta la de \$200)
- Con las cuatro billetes: \$ 50 + \$100 + \$200 + \$1000 = \$1350

Principio de multiplicación:
Si un evento puede efectuarse de n_1 formas diferentes y si continuando el procedimiento, un segundo evento puede realizarse de n_2 formas diferentes y si después de efectuados, un tercer elemento puede realizarse de n_3 formas diferentes, entonces el número de formas en que los eventos puede realizarse será $n_1 \times n_2 \times n_3$ maneras diferentes

Ejemplos:
1. El menú de un restaurante ofrece 3 platos calientes y 4 postres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un almuerzo de 1 plato caliente y 1 postre?
Se puede hacer una lista de todas las posibilidades, pero es mucho más cómodo aplicar el principio de la multiplicación:
Hay 3 maneras de elegir el plato caliente y para cada una de ellas hay 4 maneras de elegir el postre. Por lo tanto, hay $3 \cdot 4 = 12$ comidas posibles.

2. ¿Cuántos códigos de una letra y un número de un dígito se pueden formar con las 26 letras del alfabeto y los números 0, 1, 2,...,9?
Listando todas las posibilidades:

A0 A1 .... A9
B0 B1 .... B9
⋮ ⋮
Z0 Z1 .... Z9

hasta obtener 26 filas de 10 códigos en cada una: $26 \cdot 10 = 260$.
Es más simple utilizar el principio de multiplicación: hay 26 maneras de elegir la letra y para cada una de ellas hay 10 maneras de elegir el número, de modo que son $26 \cdot 10 = 260$ códigos.

Nota que en los 2 ejemplos hay total libertad de elegir el segundo elemento, no importa cómo se eligió el primero. Es decir, el segundo elemento es independiente del primero. Elegido el plato caliente, podemos elegir cualquiera de los 4 postres. Elegida la letra podemos agregarle cualquiera de los 10 números. Este principio es útil cuando se puede descomponer el proceso de recuento en pasos independientes.

Del problema de los 10 comensales, posiblemente parece increíble que 10 personas puedan colocarse en un número tan elevado de posiciones diferentes. Comprobemos el cálculo. Ante todo, hay que aprender a determinar el número de combinaciones distintas, posibles. Para mayor sencillez empecemos calculando un número pequeño de objetos, por ejemplo, tres. Llamémosles A, B y C.

Deseamos saber de cuántos modos diferentes pueden disponerse, cambiando mutuamente su posición. Hagamos el siguiente razonamiento. Si se separa de momento el objeto C, los dos restantes, A y B, pueden colocarse solamente en dos formas.

Ahora agreguemos el objeto C a cada una de las parejas obtenidas. Podemos realizar esta operación tres veces:

- Colocar C detrás de la pareja,
- Colocar C delante de la pareja,
- Colocar C entre los dos objetos de la pareja.

Es evidente que no son posibles otras posiciones distintas para el objeto C, a excepción de las tres mencionadas. Como tenemos dos parejas, AB y BA, el número total de formas posibles de colocación de los tres objetos será: $2 \times 3 = 6$

Ahora hagamos el cálculo para 4 objetos, llamémosles A, B, C y D, y separemos de momento uno de ellos, por ejemplo, el objeto D. Efectuemos con los otros tres todos los cambios posibles de posición. Ya sabemos que para tres, el número de cambios posibles es 6. ¿En cuántas formas diferentes podemos disponer el cuarto objeto en cada una de las 6 posiciones que resultan con tres objetos? Evidentemente, serán cuatro. Podemos:

- Colocar D detrás del trío,
- Colocar D delante del trío,
- Colocar D entre el 1º y de 2º objetos,

- Colocar D entre el 2º y 3º.

Obtenemos en total: $6 \times 4 = 24$ posiciones, pero teniendo en cuenta que $6 = 2 \times 3$ y que $2 = 1 \times 2$, entonces podemos calcular el número de cambios posibles de posición haciendo la siguiente multiplicación: $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Razonando de manera idéntica, cuando haya 5 objetos, hallaremos que el número de formas distintas de colocación será igual a: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
Para 6 objetos será: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ y así sucesivamente.

Volvamos de nuevo al caso antes citado de los 10 comensales. Sabremos el número de posiciones que pueden adoptar las 10 personas alrededor de la mesa, si nos tomamos el trabajo de calcular el producto siguiente: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$. El resultado es 3'628,800.

El cálculo sería más complicado, si de los 10 comensales, 5 fueran muchachas y desearan sentarse a la mesa alternando con los muchachos. A pesar de que el número posible de combinaciones se reduciría en este caso considerablemente, el cálculo sería más complejo.

Supongamos que se sienta a la mesa, indiferentemente del sitio que elija, uno de los jóvenes. Los otros cuatro pueden sentarse, dejando vacías para las muchachas las sillas intermedias, adoptando $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ formas diferentes. Como en total hay 10 sillas, el primer joven puede ocupar 10 sitios distintos. Esto significa que el número total de combinaciones posibles para los muchachos es de $10 \times 24 = 240$.

¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse en las sillas vacías, situadas entre los jóvenes las 5 muchachas? $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

Combinando cada una de las 240 posiciones de los muchachos, con cada una de las 120 que pueden adoptar las muchachas, obtendremos el número total de combinaciones posibles, o sea $240 \times 120 = 28{,}800$.

Este número, como vemos, es muchas veces inferior al que hemos citado antes y se necesitaría un total de 79 años. Los jóvenes clientes del restaurante, que vivieran hasta la edad de cien años, podrían asistir a una comida, servida gratis, sino por el propio camarero, al menos por uno de sus descendientes.

SELECCIONES

Con frecuencia cada uno de los pasos en que se divide un proceso de recuento puede interpretarse como una elección o selección de $\underline{k}$ objetos elegidos entre los elementos de un conjunto de $\underline{n}$ objetos.

Dado un conjunto de "*n*" elementos puede ocurrir:

1. Que los elementos sean distintos; en este caso, a los grupos se les denomina agrupaciones simples.
2. Que algunos elementos sean iguales; en este caso, a los grupos se les denomina agrupaciones con repetición.

Considerando la naturaleza de los elementos (que sean iguales o distintos), las *agrupaciones* recibirán el nombre de *permutaciones o combinaciones simples* cuando no se repite ningún elemento y *permutaciones o combinaciones con repetición* cuando algún elemento se repite.

Definición de factorial. Para un entero n ≥ 1, *n factorial*, expresado *n!*, se define por: $n! = (n)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ El factorial de cero se define así: 0! = 1

Gran parte de los problemas de combinatoria pueden plantearse como una serie de pasos cada uno de los cuales consiste en elegir unos cuantos de entre ciertos elementos dados.

Es conveniente remarcar que, al hacer dicha selección, hay ocasiones en las que podremos repetir dos veces el mismo objeto (por ejemplo, queremos escribir una palabra de 4 letras, entonces debemos elegir cuatro de entre las 28 letras posibles, pero obviamente podemos repetir dos veces la misma letra, como ocurre con la palabra "CASA") y otras ocasiones en las que esto no será posible (si quiero elegir tres amigos para ir a cenar, no puedo escoger tres veces al mismo). Así mismo y dependiendo de la situación, el orden en que escojo los elementos a veces es importante y a veces no. Por ejemplo, si quiero escribir una palabra de 4 letras, el orden de las mismas influye (no es lo mismo CASA que SACA), mientras que si quiero ir a cenar con tres amigos, da igual el orden en que se los diga.

6.2 Permutaciones

CASO 1.- NO PODEMOS REPETIR (PERMUTACIÓN SIMPLE U ORDINARIA)

Se llama ***permutación simple de n elementos tomados de k en k*** ($k < n$) a los distintos grupos formados por *k* elementos de forma que:

- Los *k* elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten)
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden).
- No se utilizan todos los elementos.

Al elegir un primer elemento, lo podemos hacer de *n* formas. Quitamos el elemento elegido y elegimos otro de entre los *n*-1 que quedan. Esto podrá hacerse de n-1 formas. Quitamos también este elemento y nos quedamos con n-2, de entre los que elegimos el tercero. Esto lo podremos hacer de n-2 formas...

Según la regla del producto, las maneras de escoger k elementos de entre un total de n según un determinado orden, será igual al producto de: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

Notación. $P_{n,k}$, ${}_nP_k$ y $P(n,k)$ denotan el número de permutaciones de n elementos distintos tomados de k en k.

Para llegar a una versión simplificada se opera así:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(k-1))\bullet\frac{(n-k)(n-(k+1))\ldots(3)(2)(1)}{(n-k)(n-(k+1))\ldots(3)(2)(1)}=\frac{n!}{(n-k)!}=P(n,k)$$

$$\boxed{P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Ejemplos:

1. $P(10,4)$ son las permutaciones de 10 elementos agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:

$$P(10,4)=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=5{,}040$$

Entonces podemos formar 5,040 subgrupos diferentes de 4 elementos a partir de los 10 elementos.

2. ¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

Solución:

$$P(7,3)=\frac{7!}{4!}=210$$

3. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además nos dice "cifras distintas" luego no pueden repetirse:

$P_{9,3}=9\cdot 8\cdot 7=504$

Por tanto, se pueden formar 504 números.

En el caso especial en que $n = k$, se llama *permutaciones de n*.

Se llaman *permutaciones de n* elementos a las diferentes agrupaciones de esos n elementos de forma que:

En cada grupo intervienen los n elementos sin repetirse ninguno (intervienen todos los elementos).

Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos n elementos es distinto (influye el orden).

Notación: P_n denota el número de permutaciones de n elementos distintos.

$$P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Más ejemplos:

4. P_{10} son las permutaciones de 10 elementos:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3'628{,}800$$

Es decir, se tienen 3’628,800 formas diferentes de agrupar 10 elementos.

5. Una madre tiene 3 hijos ¿de cuántas maneras distintas, nombrándolos uno por uno, puede llamarlos a cenar?

Solución: $P_3 = 3! = 6$

6. Calcular las maneras posibles de colocar las letras a, b, c.

P = 3! = 6

abc	*acb*
bac	*bca*
cab	*cba*

7. Con las letras de la palabra DISCO ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar?

Evidentemente, al tratarse de palabras el orden importa. Y además $n = m$, es decir tenemos que formar palabras de cinco letras con cinco elementos D, I, S, C, O que no están repetidos.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Por tanto, se pueden formar 120 palabras.

CASO 2.- PODEMOS REPETIR

Este caso es análogo al Caso 1, sin más modificación que no quitar en cada paso los elementos ya escogidos. Razonando igual se llega a que el número de posibles elecciones es:

$$n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

Se llaman ***Permutaciones con repetición*** *de n elementos tomados de k en k* a los distintos grupos formados por *k* elementos de manera que:

- Los elementos que forman los grupos pueden estar repetidos.
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que éstos están colocados (influye el orden)

Notación. $PR_{n,k}$ denota el número de permutaciones con repetición de n elementos distintos tomados de k en k

$$PR_{n,k} = n^k$$

Ejemplos:

1. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos 1 y 2?
Solución: $2^3 = 8$

2. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además no dice nada sobre "cifras distintas", luego sí pueden repetirse.

Por tanto, se pueden formar 729 números: $PR_{9,3} = 9^3 = 729$

3. ¿Cuántas palabras distintas de 10 letras (con o sin sentido) se pueden escribir utilizando sólo las letras a, b?

Al tratarse de palabras el orden importa y además como son palabras de 10 letras y sólo tenemos dos para formarlas, deben repetirse.

$$PR_{10,2} = 2^{10} = 1024$$

Por tanto, se pueden formar 1024 palabras.

CASO 3.- PODEMOS REPETIR Y EXISTEN ELEMENTOS REPETIDOS

Son permutaciones con repetición de *n* elementos, no todos distintos. Todas las agrupaciones de *n* elementos, formadas por aquellos, están dispuestos linealmente y sin que ninguno haga falta.

El número de permutaciones con repetición que pueden realizarse con n elementos, donde existen α_1, α_2, α_3,... α_m elementos iguales entre sí (de una misma clase) y el resto distintos entre sí y distintos también a los anteriores es:

$$P^{n}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1!\times\alpha_2!\times\ldots\times\alpha_m!}$$

Ejemplos:

1. Calcular las permutaciones de 10 elementos, en los que uno de ellos se repite en 2 ocasiones y otro se repite en 3 ocasiones:

$$P^{10}_{2,3} = \frac{10!}{2!\times 3!} = 302{,}400$$

Es decir, se tienen 302,400 formas diferentes de agrupar estos 10 elementos.

2. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 1, 1, 2, 2 y 3?

Solución: $$\frac{6!}{3!\times 2!} = 60$$

3. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

El orden importa por ser de distinto color, pero hay bolas del mismo color (están repetidas) y además n = k, es decir colocamos 9 bolas en línea y tenemos 9 bolas para colocar:

$$\frac{9!}{4!\times 3!\times 2!} = 1260$$

Por tanto, tenemos 1260 modos de colocarlas.

6.3 Combinaciones

Caso 1.- EL ORDEN NO IMPORTA PERO NO SE PUEDEN REPETIR ELEMENTOS.

Tomamos las $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ posibilidades y las partimos en clases, de forma que en cada clase estén aquellas elecciones que sean la misma salvo el orden.

Para k elementos, la forma de ordenarlos será k! y, así, en cada tipo se tienen exactamente k! casos.

Por tanto, el número de tipos, es decir, el número de posibilidades de escoger k elementos sin importar el orden y sin repetir es

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Este número suele conocerse como el número de combinaciones de *n* elementos tomadas de *k* en *k* y se denota por:

$$C_{n.k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se llama ***combinaciones de n elementos tomados de k en k*** ($k \leq n$) a todas las clases posibles que pueden hacerse con los *n* elementos de forma que:

- Cada agrupación está formada por *n* elementos distintos entre sí
- Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

Ejemplos:

1. Un alumno decide rendir tres de los cinco exámenes finales ¿De cuántas maneras distintas puede elegir esas tres pruebas?

Solución: $$C_{5,3}=\frac{5!}{3!\times 2!}=10$$

2. ¿Cuántas combinaciones de 6 aciertos existen en la lotería primitiva?

$$C_{49,6}=\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!(49-6)!}=13{,}983{,}816$$

Es decir, que tendríamos que echar 13’983,816 apuestas de 6 números para tener la seguridad al 100% de que íbamos a acertar.

3. ¿Cuántos grupos de 5 alumnos pueden formarse con los treinta alumnos de una clase? (Un grupo es distinto de otro si se diferencia de otro por lo menos en un alumno)

No importa el orden (son grupos de alumnos). No puede haber dos alumnos iguales en un grupo evidentemente, luego sin repetición.

$$C_{30,5} = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{5! \cdot 25!} = 142{,}506$$

Por tanto, se pueden formar 142,506 grupos distintos.

En general, calcular $\binom{n}{k}$ por la fórmula anterior implica calcular varios factoriales, lo que hace que no sea muy útil en la práctica. Un método alternativo viene dado por las siguientes propiedades:

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

CASO 2.- EL ORDEN NO IMPORTA Y SÍ SE PUEDE REPETIR (COMBINACIONES CON REPETICIÓN).

Una combinación con repetición de tamaño *k* es una selección no ordenada de *k* objetos elegidos entre *n* tipos diferentes de objetos, habiendo una cantidad ilimitada de cada tipo.

Una combinación con repetición puede describirse diciendo que elegimos x_1 objetos de tipo 1, x_2 objetos de tipo 2,..., x_n objetos de tipo n para alguna n-pla (x_1, x_2,..., x_n). Cada uno de los enteros x_1, x_2,..., x_n es no negativo y $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

Así pues, las combinaciones con repetición de tamaño *k* se corresponden con las soluciones enteras no negativas de la ecuación: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

El número de combinaciones de tamaño *k* con repetición ilimitada elegidas entre n tipos diferentes de objetos es:

$$C^R_{n,k} = \binom{n-1+k}{\text{k}}$$

Cada combinación con repetición se representa por una palabra en el alfabeto {0,1} del siguiente modo: Los 0's son las marcas que separan los objetos de cada tipo y los 1's indican los objetos que hay de cada uno de los tipos entre dos marcas consecutivas. Si hay n tipos de objetos se necesitan n - 1 marcas para separar los tipos y, por tanto, las palabras de 0's y 1's tienen longitud *n* - 1 + *k*. Así se convierte cada combinación con repetición de tamaño k en una combinación de k objetos (las posiciones de los 1's) elegidos entre un conjunto de n - 1 + k elementos (las posiciones).

Se llama combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, a los distintos grupos formados por k elementos de manera que:

Los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos.

Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

Ejemplos:

1. $C^R_{10,4}$ son las combinaciones de 10 elementos con repetición, agrupándolos en subgrupos de 4, en los que 2, 3 o los 4 elementos podrían estar repetidos:

$$C^R_{10,4} = \frac{13!}{4! \times 9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 715$$

Es decir, podríamos formar 715 subgrupos diferentes de 4 elementos.

2. Las combinaciones con repetición de los elementos {a, b, c, d} tomados de dos en dos son: aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd

3. En una bodega hay 12 botellas de ron, 12 de ginebra y 12 de anís. Un cliente compró 8 botellas en total. ¿Cuántas posibilidades hay?

$$C^R_{3,8} = 120$$

4: En una confitería hay cinco tipos diferentes de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pasteles?

No importa el orden (son pasteles). Puede haber dos o más pasteles del mismo tipo en un grupo, luego con repetición.

$$C^R_{5,4} = \binom{5+4-1}{4} = \frac{8!}{4!(5-1)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4!} = 70$$

Por tanto, se pueden elegir 4 pasteles de 70 formas distintas.

SELECCIONES (de *k* elementos entre *n*)

	ORDENADAS	NO ORDENADAS
SIN REPETICIÓN	$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
CON REPETICIÓN	n^k	$\binom{n-1+k}{k}$

Tips para resolver problemas

- Si en cada agrupación figuran todos o algunos de los elementos disponibles, *importando su orden* de colocación, entonces se trata de un problema de **permutaciones**.

- Si en cada agrupación figuran todos o algunos de los elementos disponibles, *sin importar el orden* de colocación de éstos, entonces estamos ante un problema de **combinaciones**.

6.4 Cuatro conceptos

Series

En matemática, una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Se representa una serie con términos a_n como

$$\sum_{i=1}^{N} a_n$$

donde N es el índice final de la serie. Las *series infinitas* van desde 1 hasta ∞.
Las series pueden *converger* o *divergir*. En cálculo, una serie diverge si converge a la infinito. Para los matemáticos, una serie diverge si no converge a nada.

Algunos tipos de series
Una *serie geométrica* es una serie donde cada sucesivo término está producido multiplicando el término previo por una constante. Ejemplo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{3}\frac{1}{2^n}.$$

En general, las series geométricas

$$\sum_{n=0}^{2} z^n$$

convergen si y solo si $|z| < 1$.

Una *serie armónica* es del tipo

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

La serie armónica es divergente.

Una *serie alternada* es una serie donde los términos alternan el signo. Ejemplo:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Ejemplo:

$$B = B_0(1+R)^n$$

Número de períodos
Interés en el período
Capital a invertir
Capital final

¿Qué pasa si cada período se invierte una misma cantidad?

Cada mes se deposita \$1000 en un plan de ahorro que gana 0.5% de interés mensual. ¿Cuánto se ha ahorrado después del 25º depósito? ¿Cuánto se tiene en el n-ésimo depósito?
Solución:

El primer depósito va a generar : $1000\left(1+\dfrac{0.5}{100}\right)^{25} = 1000(1.005)^{25}$ pesos de capital + interés

El segundo depósito va a generar $= 1000(1.005)^{24}$ pesos de capital + interés

El tercer depósito va a generar $= 1000(1.005)^{23}$ pesos de capital + interés

o

o

o

El depósito número 24 va a generar $= 1000(1.005)^{1}$ pesos de capital + interés

El depósito número 25 va a generar $= 1000(1.005)^{0}$ pesos de capital + interés

El total de capital invertido + el interés generado es la suma de lo que se genera en cada período.
Esto es:

Capital final =

$$1000(1.005)^{25} + 1000(1.005)^{24} + 1000(1.005)^{23} + \ldots\ldots..1000(1.005)^{1} + 1000(1.005)^{0}$$

Factorizando:

Capital final = $1000\left[(1.005)^{25} + (1.005)^{24} + (1.005)^{23} + \ldots\ldots..(1.005)^{1} + (1.005)^{0}\right]$

La expresión $\left[(1.005)^{25}+(1.005)^{24}+(1.005)^{23}+........(1.005)^{1}+(1.005)^{0}\right]$ es la suma de una base (1.005) que se eleva a cada uno de los exponentes desde cero hasta 25.
A esta suma se le llama **sumatoria** y se representa por el símbolo $\sum$. De tal forma que para calcular el capital después de haber invertido durante 25 meses la cantidad de $1000, matemáticamente se representa:

$$\sum_{i=0}^{25} 1000(1.005)^{i}$$

que se lee: la sumatoria desde $i=0$ hasta $i=25$ de 1000 por (1.005) a la i. Esto significa que:

$$\sum_{i=0}^{25} 1000(1.005)^{i} = 1000(1.005)^{0} + 1000(1.005)^{1} + ... + 1000(1.005)^{24} + 1000(1.005)^{25}$$

A esto se le llama una **SERIE**

En forma general:

$$\sum_{i=0}^{N} a\left(1+\frac{R}{100}\right)^{i}$$

Si $r = 1+\frac{R}{100}$ entonces tenemos **una SERIE GEOMÉTRICA**: $\sum_{i=0}^{N} ar^{i}$ en donde:

$$\sum_{i=0}^{N} ar^{i} = \frac{a\left(r^{N}-1\right)}{r-1}$$

a esto se le llama la N-ésima sumatoria **S_N.**

Entonces la solución del problema: $\sum_{i=0}^{25} 1000(1.005)^{i}$ va a ser igual a

$$\sum_{i=0}^{25} 1000(1.005)^{i} = 1000\frac{(1.005^{25}-1)}{1.005-1}$$

$$= 26{,}559.12$$

esto significa que sumando el depósito número 25 se va a tener $26,559.12 pesos.

Series infinitas

Cuando el número de períodos es muy grande, esto es $N \to \infty$ se tiene una serie infinita de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^{i}$$

en donde la suma total es igual a (o la suma tiende a):

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^{i} = \frac{a}{1-r}$$

Donde:
Si $r < 1$ la serie es **convergente**.
Esto significa que tiene una suma total en $\frac{a}{1-r}$
Si $r > 1$ la series **es divergente**.
Esto significa que no tiene una suma total.

Ejemplos:

1) $\sum_{i=0}^{\infty} 1000(1.005)^{i}$ es divergente porque $r > 1$ por lo tanto no tiene suma total

2) $\sum_{i=0}^{\infty} 3(1/2)^{i}$ es convergente porque $r < 1$ y converge a $\frac{3}{1-1/2} = 6$

3) $\sum_{i=0}^{\infty} (3/2)^{i}$ es divergente porque $r > 1$

4) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3}{10^{i}}$ es convergente porque $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3}{10^{i}} = \sum_{i=0}^{\infty} 3\frac{1}{10^{i}} = \sum_{i=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{10}\right)^{i}$ y converge a $\frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{30}{9}$

Propiedades de las series

1) $\sum_{i=1}^{N} ca_i = c\sum_{i=1}^{N} a_i$ donde a_i es una expresión en función de i

2) $\sum_{i=1}^{N} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i \pm \sum_{i=1}^{N} b_i$

3) $\sum_{i=1}^{i=c} d = cd$ donde d es un número cualquiera y c es un número entero positivo

4) $\boxed{\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}}$

5) $\boxed{\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}$

6) $\boxed{\sum_{i=1}^{N} i^3 = \left[\frac{N(N+1)}{2}\right]^2}$

Ejemplo:

Obtener la suma de $\sum_{i=1}^{68} (i+1)(i-1)$

Solución:

$$\sum_{i=1}^{68} (i+1)(i-1) = \sum_{i=1}^{68} (i^2 - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{68} i^2 - \sum_{i=1}^{68} 1$$

$$= \frac{68(68+1)(2(68)+1)}{6} - 68(1)$$

$$=107{,}068$$

Teorema binomial

$$(x+y)^n$$

El teorema binomial dice:
Si x y y son variables y n es un número entero positivo, entonces

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{n}x^ny^0$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

Donde: $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ y $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ y $\binom{n}{1}=n$

Ejemplo:

$$(x+y)^7=\binom{7}{0}x^0y^7+\binom{7}{1}x^1y^6+\binom{7}{2}x^2y^5+\binom{7}{3}x^3y^4+\binom{7}{4}x^4y^3+\binom{7}{5}x^5y^2+\binom{7}{6}x^6y^1+\binom{7}{7}x^7y^0$$

$$\binom{7}{0}=1 \qquad \binom{7}{1}=7 \qquad \binom{7}{7}=1$$

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7x6x5!}{2x5!}=21 \qquad \binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7x6x5x4!}{3!x4!}=35$$

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7x6x5x4x3!}{4!x3!}=35 \qquad \binom{7}{5}=\frac{7!}{5!(7-5)!}=\frac{7x6x5x4x3x2!}{5!x2!}=21$$

$$\binom{7}{6}=\frac{7!}{6!(7-6)!}=\frac{7x6x5x4x3x2x1}{6!x1}=7$$

$$(x+y)^7=y^7+7xy^6+21x^2y^5+35x^3y^4+35x^4y^3+21x^5y^2+7x^6y^1+x^7$$

Un algoritmo para elevar un binomio a la n potencia es:

Algoritmo para calcular los coeficientes de los término de $(x+y)^n$

Entrada: n;
Entero: r; $C(n)$;

Inicio: $C(1)=1$
$C(2)=n$;
$C(n)=1$

Ciclo:
$r=3$;

MIENTRAS $r\le n$ HACER

$C(r)=FACTORIAL\ (n)\ /\ [r\ *$

$r=r+1$;
FIN DEL MIENTRAS
Salida: $C(n)$

El principio de las casillas

El principio de conteo más útil es el más sencillo. El principio de las casillas se basa en la separación de elementos de un conjunto. Por ejemplo, si hay tres canicas que se reparten entre dos niños, a un niño le tocan dos (si no se queda con las tres). El principio se define de la siguiente manera:

"Si n+1 objetos se deben de acomodar en n casillas, en alguna de las casillas hay más de un objeto"

Esta aseveración se conoce también como el Principio de Dirichlet o el Principio de las palomas. Peter Dirichlet fue el primero en utilizarlo en teoría de números en el siglo XIX.

Para entender la validez de este principio, se puede pensar en qué pasaría si en cada casilla hay lo más un objeto, esto implica que en las casillas hay acomodados a lo más n objetos, lo que es una contradicción ya que se han repartido los $n + 1$ objetos.

Este principio ayuda a resolver problemas de existencia; ayuda a garantizar si dentro de una serie de sucesos existe la certeza de que sucede alguna situación especial.

Reconocer cómo y cuando deberá usarse el principio requiere de práctica para detectar quienes son los objetos y quienes son las casillas. Reconocer y definir los objetos y las casillas es la parte central para utilizar el principio.

Ejemplo:

En un grupo de tres personas hay dos del mismo sexo.

En un grupo de 13 personas hay dos que nacieron el mismo mes.

En un grupo de 366 personas hay dos que tienen el mismo día de cumpleaños.

En los tres casos los objetos son las personas y las casillas, los dos sexos, los doce meses del año, y los 365 días del año respectivamente.

Ejemplo:

Cinco palomas vuelan hacia un palomar de 4 agujeros, entonces en uno de los agujeros hay dos o más palomas. En general, si (n+1) palomas están en n agujeros, por lo menos uno de los agujeros contiene dos o mas palomas.

Ejemplo:

Una línea no puede cortar internamente a los tres lados de un triángulo.

Solución: Este ejemplo es el primero donde hay una primera dificultad: debemos decir quiénes son los objetos y quiénes son las casillas. Las casillas son los dos semi- planos que determina la línea, los objetos serán los vértices del triángulo. Observemos que si dos vértices del triángulo se encuentran en uno de los semiplanos, el segmento (lado del triángulo) que ellos determinan no será cortado por la línea.

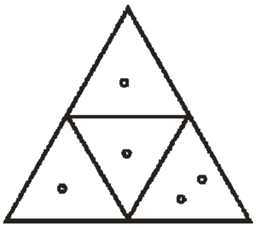
Pidamos primero que la línea no pase por alguno de los vértices del triángulo. Por el ***Principio de las casillas*** hay dos puntos en alguno de los semiplanos (quizás los tres), luego alguno de los lados no será cortado por la línea. Si la línea pasa por alguno de los vértices, esta podrá cortar a lo más a uno de los lados.

Ejemplo:

De cinco puntos dentro o sobre los lados de un triangulo equilátero de lado 2 hay dos cuya distancia entre ellos es menor o igual a 1.

Solución: Aquí la situación es un poco más delicada. Aquí hay que crear las casillas; los objetos son los cinco puntos y buscamos dos de ellos a una distancia menor o igual que uno. Si dividimos en casillas de manera que: dos en una casilla garanticen que su distancia es menor o igual que uno, terminamos. Se sugiere entonces crear cuatro casillas, al dividir los lados del triángulo con sus puntos medios y al unir estos con segmentos de línea se forman cuatro triángulos congruentes de lado 1.

Por el *Principio de las casillas*, de los cinco puntos dados, hay dos puntos en alguno de los triángulos pequeños, estos dos puntos son los buscados.



Actividades de Principio de las casillas
Investigación

Investigación individual del tema del Principio de las casillas.

1. Introducción. En donde describes el objetivo de la investigación (más allá de que es un trabajo para la materia).

2. Historia. Para este punto debes investigar el desarrollo histórico del análisis combinatorio, los matemáticos que lo establecieron y el autor del principio.

3. El principio de las casillas. Debe de contener la explicación clara y sencilla, con tus palabras, del principio y sus aplicaciones en las ciencias.

4. Aplicaciones. Desarrollar ejemplos del uso del principio en situaciones reales y prácticas.

5. Conclusiones. Después de todo lo anterior, hacer un análisis del porque del principio, su uso y aplicaciones.

6. Bibliografía. Es muy importante que menciones los libros, artículos y revistas así como las páginas de INTERNET que consultaste para la investigación.

Entregar por escrito la investigación (a mano)

Inducción matemática

La **inducción** es un razonamiento que permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que depende de un parámetro *n* que toma una infinidad de valores, usualmente en el conjunto de los enteros naturales $\mathbb{N}$.

El esquema del razonamiento es el siguiente: Llamemos P_n la proposición al rango n.

- Se demuestra que P_0 es cierta (iniciación de la inducción).
- Se demuestra que si se asume P_n como cierta, entonces P_{n+1} lo es también, y esto sin condición sobre el entero natural n. (relación de inducción).
- En conclusión, se ha demostrado, por inducción, que P_n es cierto para todo natural n.
- La inducción puede empezar por otro término que P_0, digamos por P_{n_0}. Entonces P_n será válido a partir del rango n_0, es decir, para todo natural $n \geq n_0$.

Ejemplo:
Demostrar que para todo $n \geq 1$, 6^n es un número que acaba en 6.
Sea P_n: "*6^n acaba en 6*".
Obviamente P_1 es cierto porque $6^1 = 6$. También lo es P_2 pues 36 acaba en 6.
Supongamos que P_n es cierto para un valor de n, y probemos P_{n+1}.
Un entero acaba por 6 si se puede escribir así: $10a + 6$, con *a* entero. La hipótesis es, pues, $6^n = 10a + 6$.
Entonces $6^{n+1} = 6(10a + 6) = 60a + 36 = 60a + 30 + 6 = 10(6a + 3) + 6 = 10c + 6$, con $c=6a + 3$, entero.
Esta última escritura prueba que 6^{n+1} acaba por 6, o sea que P_{n+1} es cierto.
Luego P_n es cierto para todo $n \geq 1$.

La inducción es válida por la construcción misma del conjunto de los naturales mediante los *axiomas de Peano*. De hecho, la inducción imita la construcción del conjunto: 0 es un natural, y, si n lo es, entonces n+1 (sucesor de n) lo es también.

Existen otras inducciones, para otros conjuntos elaborados de forma distinta, como por ejemplo la inducción transfinita, y la inducción sobre las fórmulas de la lógica proposicional.

Además de la demostración por inducción, existe la *definición o construcción por inducción*. Por ejemplo, una sucesión aritmética puede ser definida como función de n: $u_n = a + rn$, o por inducción:

- $u_0 = a$
- $u_{n+1} = u_n + r$.

El principio del buen orden

Cuando un conjunto tiene un elemento mínimo
Principio de Inducción finita o Inducción matemática
PARA ENTEROS POSITIVOS
Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta en la que aparece una o varias n que representa un entero positivo

a) Si $S(1)$ es verdadera y

A esto se le llama base de la inducción

b) Siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k \in Z^+$ particular, pero elegido al azar) entra en $S(k+1)$ será verdadero entonces $S(n)$ verdadera $\forall n \in Z^+$

A esto se le llama paso inductivo

Ejemplo: Demostrar que:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Comprobación:

$$S(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

$$S(1) = \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$ por lo tanto se cumple en el primero

$$S(3) = \sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$$

$$S(3) = \sum_{i=1}^{3} i = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$ por lo tanto se cumple para un número al azar (3)

$$S(4) = \sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$$

$$S(4) = \sum_{i=1}^{4} i = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$ por lo tanto se cumple para el siguiente número

por lo tanto se deduce que $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para cualquier número

otro ejemplo:

Demostrar por inducción matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

PROBLEMA: la siguiente subrutina, ¿qué valor regresa?

SUBRUTINA algo (entrada n, x, salida x)
MIENTRAS QUE $n \neq 0$ hacer:

$x = x * n$

$n = n - 1$

FIN MIENTRAS
SALIDA = X